ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN THỊ THU THẢO

ĐỊNH LÝ RITT THỨ HAI ĐỐI VỚI HÀM PHÂN HÌNH VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên, năm 2020

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN THỊ THU THẢO

ĐỊNH LÝ RITT THỨ HAI ĐỐI VỚI HÀM PHÂN HÌNH VÀ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: Toán Giải tích
Mã số: 8.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
TS. VŨ HOÀI AN

Thái Nguyên, năm 2020

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan luận văn là công trình nghiên cứu của riêng tôi dưới sự hướng dẫn trực tiếp của TS. Vũ Hoài An. Các tài liệu trong luận văn là trung thực.

Tôi cũng xin cam đoan rằng mọi sự giúp đỡ cho việc thực hiện luận văn này đã được cảm ơn và các thông tin trích dẫn trong luận văn đã được chỉ rõ nguồn gốc.

Tác giả

Nguyễn Thị Thu Thảo

Lời cảm ơn

Luận văn được thực hiện và hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình của TS. Vũ Hoài An. Nhân dịp này tôi xin bày tỏ lòng kính trọng, biết ơn chân thành và sâu sắc nhất đến thầy, người đã định hướng chọn đề tài và luôn dành nhiều thời gian, công sức, giúp đỡ tôi trong suốt quá trình nghiên cứu và hoàn thiện luận văn này.

Tôi xin trân trọng cảm ơn Phòng Đào tạo Sau đại học, Ban chủ nhiệm Khoa Toán, các thầy cô giáo Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên, Viện Toán Học và Trường Đại học Sư phạm Hà Nội đã giảng dạy và tạo điều kiện thuận lợi cho tôi trong quá trình học tập và nghiên cứu khoa học.

Tôi cũng xin gửi lời cảm ơn đến gia đình, bạn bè và đồng nghiệp đã luôn cổ vũ, động viên, giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập và hoàn thành luận văn này.

Luận văn chắc chắn sẽ không tránh khỏi những khiếm khuyết, vì vậy rất mong nhận được sự đóng góp ý kiến của các thầy cô giáo và các bạn học viên để luận văn này được hoàn chỉnh hơn.

Thái Nguyên, tháng 6 năm 2020

Tác giả

Nguyễn Thị Thu Thảo

Mục lục

Mở đầu

1. Lí do chọn đề tài

Định lý cơ bản của lý thuyết số được phát biểu như sau: Mọi số nguyên $n \geq 2$ đều biểu diễn duy nhất dưới dạng $n = p_1^{m_1}...p_k^{m_k}$ với $k \geq 1$, ở đó p_1, ..., p_k là các số nguyên tố đôi một phân biệt và $m_1 \geq 1$, ..., $m_k \geq 1$ là các số nguyên dương.

Năm 1922, Ritt [6] đã tổng quát hóa định lý này đối với đa thức. Ông đã tương tự phép toán nhân giữa các số thành phép toán hợp giữa các đa thức và tương tự khái niệm số nguyên tố thành khái niệm đa thức không phân tích được. Áp dụng lý thuyết Galois cho phương trình với ẩn là đa thức, Ritt đã chứng minh hai định lý sau.

Ta kí hiệu $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ (tương ứng, $\mathcal{A}(\mathbb{C})$) là tập các hàm phân hình (nguyên) và kí hiệu $\mathcal{L}(\mathbb{C})$ là tập các đa thức bậc một. Đặt $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ là các tập con khác rỗng của $\mathcal{M}(\mathbb{C})$, khi đó một hàm phân hình $F(z)$ được gọi là *không phân tích được* trên $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$ nếu bất kì cách viết thành nhân tử $F(z) = f \circ g(z)$ với $f(z) \in \mathcal{E}$ và $g(z) \in \mathcal{F}$ đều kéo theo hoặc f là tuyến tính hoặc g là tuyến tính.

Định lý 1.*(Định lý Ritt thứ nhất).* *Cho $\mathcal{F}$ là tập con khác rỗng của $\mathbb{C}[x]\backslash\mathcal{L}(\mathbb{C})$. Nếu một đa thức $F(z)$ có hai cách phân tích khác nhau thành các đa thức không phân tích được trên $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$:*

$$F = \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \varphi_r = \psi_1 \circ \psi_2 \circ \dots \psi_s,$$

thì r=s, và bậc của các đa thức ψ là bằng với bậc của các đa thức φ nếu không tính đến thứ tự xuất hiện của chúng.

Định lý 2.*(Định lý Ritt thứ hai).* *Giả sử rằng a, b, c, $d \in \mathbb{C}[x]\backslash\mathbb{C}$ thỏa mãn $a \circ b = c \circ d$ và $gcd(deg(a), deg(c)) = gcd(deg(b), deg(d)) = 1$. Khi đó tồn tại các hàm tuyến tính $l_j \in \mathbb{C}[x]$ sao cho $(l_1 \circ a \circ l_2, l_2^{-1} \circ b \circ l_3, l_1 \circ c \circ l_2, l_4^{-1} \circ d \circ l_3)$ có một trong các dạng*

$$(F_n, F_m, F_m, F_n) \text{ hoặc}$$

$$\left(X^n, X^s h\left(X^n\right), X^s h(X)^n, X^n\right),$$

ở đó m, n > 0 là nguyên tố cùng nhau, s > 0 nguyên tố cùng nhau với n, và $h \in \mathbb{C}[x] \backslash X\mathbb{C}[x]$, l_j^{-1} *là hàm ngược của* l_j, F_n, F_m *là các đa thức Chebychev.*

Định lý thứ hai của Ritt mô tả các đa thức nghiệm đúng phương trình hàm $P(f) = Q(g)$ trong trường hợp bậc của các đa thức P, Q (tương ứng f, g) nguyên tố cùng nhau. Rõ ràng phương trình đa thức được Ritt nghiên cứu là trường hợp riêng của phương trình hàm $P(f) = Q(g)$, ở đó P, Q là các đa thức và f, g là các hàm phân hình. Phương trình hàm $P(f) = Q(g)$ được nghiên cứu liên tục và mạnh mẽ với các kết quả của H.Fujimoto, Ha Huy Khoai-C.C.Yang, F.Pakovich, C.C.Yang-X.H.Hua, ...(Xem [2], [3], [4], [5]).

Để ý rằng, phương trình hàm liên quan mật thiết đến vấn đề duy nhất của lý thuyết phân bố giá trị được nghiên cứu lần đầu tiên bởi R.Nevanlinna. Cho f là hàm phân hình khác hằng trên $\mathbb{C}$. Với mỗi $a \in \mathbb{C}$, ta xác định hàm $\nu_f^a : \mathbb{C} \to \mathbb{N}$ bởi

$$\nu_f^a = \begin{cases} 0 & \text{nếu } f(z) \neq a, \\ m & \text{nếu } f(z) = a \text{ với bội } m, \end{cases}$$

và đặt $\nu_f^\infty = \nu_{\frac{1}{f}}^0$. Với $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ và $S \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, ta định nghĩa

$$E_f(S) = \bigcup_{a \in S} \left\{ \left(z, \nu_f^a(z)\right) : z \in \mathbb{C} \right\}.$$

Cho $\mathcal{F}$ là một tập con khác rỗng của $\mathcal{M}(\mathbb{C})$. Hai hàm f, g của $\mathcal{F}$ được gọi là *nhận chung S, tính cả bội*, nếu $E_f(S) = E_g(S)$. Lấy một tập $S \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ và f, g là hai hàm phân hình (nguyên) khác hằng. Nếu $E_f(S) = E_g(S)$ kéo theo $f = g$ với bất kì hai hàm phân hình (nguyên) f, g khác hằng, thì S được gọi là tập xác định duy nhất đối với các hàm phân hình (nguyên). Hai tập $S_1, S_2 \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ được gọi là song tập xác định duy nhất đối với hàm phân hình (nguyên), nếu với bất kì hai hàm phân hình (hàm nguyên) f, g thỏa mãn điều kiện $E_f(S_i) = E_g(S_i), i = 1, 2$, kéo theo $f = g$. Tập xác định duy nhất đối với hàm phân hình (hàm nguyên) đã được tìm thấy bởi Frank và Reinders, Fujimoto, Li và Yang, Mues và Reinders, Yi, ...(Xem [2], [3]).

Quy trình giải bài toán: Tìm tập xác định duy nhất đối với hàm phân hình f, g gồm hai bước.

Bước 1: Chuyển điều kiện nghịch ảnh đối với f, g về phương trình hàm $P(f) = cP(g)$, ở đó P là đa thức, $c \neq 0$.

Bước 2: Tìm điều kiện để phương trình $P(f) = cP(g)$ có nghiệm duy nhất $f = g$.

Quan sát quá trình trên ta thấy rằng nếu giải được phương trình $P(f) = Q(g)$, ở đó P, Q là các đa thức, f, g là hai hàm phân hình thì tìm được các tập X, Y, các hàm phân hình f, g thỏa mãn điều kiện $E_f(X) = E_g(Y)$, ở đó X, Y lần lượt là tập các không điểm của P, Q.

Từ nhận xét này, ta xét bài toán sau.

Bài toán A: Cho X, Y là hai tập gồm các phần tử biệt của $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Ký hiệu

$$A(f,g) = \{f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{C}) : E_f(X) = E_g(Y)\}$$

Hãy xác định $A(f,g)$.

Trong trường hợp $X = Y$ và lực lượng của $A(f,g)$ là 1 thì bài toán A là bài toán tập xác định duy nhất.

Đối với Định lý Ritt thứ hai, kết quả đầu tiên theo hướng nghiên cứu này thuộc về Pakovich. Ông đã tương tự Định lý Ritt thứ hai cho phương trình hàm $P(f) = Q(g)$, ở đó P, Q là các đa thức và f, g là các hàm nguyên (xem [5]). Nhờ đó, Pakovich đưa ra điều kiện cần và đủ để một đa thức là đa thức duy nhất mạnh. Tuy nhiên, tiêu chuẩn này rất khó kiểm tra.

Trong [2], Ha Huy Khoai, Vu Hoai An and Pham Ngoc Hoa đã tương tự Định lý Ritt thứ nhất, Định lý Ritt thứ hai cho hàm phân hình. Từ đó, như một ứng dụng, họ đã giải được bài toán A trong trường hợp P, Q là hai đa thức kiểu Fermat-Waring:

$$P(z) = az^n + bz^{n-m} + c, \; Q(z) = uz^n + vz^{n-m} + t.$$

Chú ý rằng, trước tiên họ đã thiết lập Định lý Ritt thứ hai đối với hàm phân hình, sau đó như một hệ quả họ nhận được Định lý Ritt thứ nhất đối với hàm phân hình. Họ cũng đưa ra các ứng dụng của việc giải phương trình $P(f) = Q(g)$ vào bài toán tập xác định duy nhất. Trong [3], Ha Huy Khoai, Vu Hoai An and Le Quang Ninh đã thiết lập các định lý duy nhất cho đường cong chỉnh hình với các siêu mặt kiểu Fermat-Waring thông qua việc giải phương trình $P(f) = Q(g)$ nói trên. Với lý do trên, tôi chọn đề tài **"Định lý Ritt thứ hai đối với hàm phân hình và ứng dụng"**.

2. Mục tiêu của luận văn

Trên cơ sở kết quả của Ha Huy Khoai, Vu Hoai An and Pham Ngoc Hoa [2], Ha Huy Khoai, Vu Hoai An and Le Quang Ninh [3], tác giả trình bày Định lý Ritt thứ hai đối với hàm phân hình và ứng dụng vào giải bài toán xác định hàm phân hình (Bài toán A).

3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Định lý Ritt thứ hai đối với hàm phân hình và ứng dụng vào giải bài toán xác định hàm phân hình trong trường hợp các đa thức được xét là hai đa thức kiểu Fermat-Waring

$$F(z) = az^n + bz^{n-m} + c,\ Q(z) = uz^n + vz^{n-m} + t.$$

4. Phương pháp và công cụ nghiên cứu

Hai Định lý cơ bản và các kiểu Bổ đề Borel của Lý thuyết phân bố giá trị để giải các phương trình hàm đã được sử dụng. Nhờ đó các kết quả về vấn đề xác định hàm và vấn đề duy nhất đã được trình bày.

5. Ý nghĩa khoa học của luận văn

Luận văn đã trình bày Định lý Ritt thứ hai đối với hàm phân hình và ứng dụng vào bài toán xác định hàm phân hình và bài toán xác định duy nhất hàm phân hình. Các kết quả trình bày ở đây là các kết quả đã được công bố trong [2], [3]. Định lý 2.1.1 là một tương tự của Định lý Ritt thứ hai cho hàm phân hình. Nó mô tả nghiệm của phương trình hàm

$$f^n + a_1 f^{n-m} + b_1 = c(g^n + a_2 g^{n-m} + b_2).$$

Định lý 2.1.5 là một tương tự của Định lý Ritt thứ hai đối với bốn hàm nguyên. Nó mô tả nghiệm của phương trình hàm (đối với bốn hàm nguyên)

$$cf_1^n + df_1^{n-m} f_2^m + ef_2^n = ug_1^n + vg_1^{n-m} g_2^m + tg_2^n.$$

Ứng dụng của Định lý 2.1.1, Định lý 2.1.5 vào vấn đề xác định hàm phân hình là các Định lý 2.2.4, 2.2.5, 2.2.7, 2.2.8. Các định lý này thiết lập quan hệ giữa hai hàm phân hình thông qua điều kiện ảnh ngược của các tập hữu hạn. Các Hệ quả 2.2.1, 2.2.2, 2.2.3 là ứng dụng của Định lý 2.1.1, Định lý

2.1.5 vào bài toán thiết lập các đa thức duy nhất, đa thức duy nhất mạnh. Đây là tài liệu tham khảo hữu ích đối với học viên cao học, nghiên cứu sinh chuyên ngành giải tích,...

6. Cấu trúc của luận văn

Luận văn bao gồm hai chương:

Chương 1: Hai Định lý cơ bản của Lý thuyết phân bố giá trị

Trong chương này, chúng tôi trình bày một số khái niệm cơ bản: các hàm Nevanlinna cùng các tính chất và ví dụ; trình bày Định lý cơ bản thứ nhất (Định lý 1.2.1), Định lý cơ bản thứ hai (Định lý 1.3.1) cùng các bổ đề cần dùng cho chương 2 tiếp theo.

Chương 2: Định lý Ritt thứ hai đối với hàm phân hình và ứng dụng

Chương 2 trình bày nội dung chính của luận văn. Trước tiên chúng tôi trình bày hai tương tự của Định lý Ritt cho hàm phân hình và bốn hàm nguyên. Đó là các Định lý 2.1.1, 2.1.5. Các ứng dụng của hai định lý này được trình bày trong luận văn là các Định lý 2.2.4, 2.2.5, 2.2.7, 2.2.8 và các Hệ quả 2.2.1, 2.2.2, 2.2.3.